مجلة البحوث الهندسية

العدد الثاني — الكانون (ديسمبر) — 1991

مجلة البحوث الهندسية تصدر دوريا عن مركز بحوث العلوم الهندسية - طرابلس/ الجماهيرية

1 - مقارنة بين استعمال طريقة المعاملات والطريقة المباشرة فى تصميم البلاطات الخرسانية المسلحة ذات الاتجاهين والمحمولة على عوارض. ..... محمود عبد الرحمن القلهود

2 - التغير فى القصور الذاتى للذراعيات مستطيلة القطاع. ..... مصطفى محمد الطويل

3 - دراسة صخور خواص البازلت واستخداماتها فى الخلطات الخرسانية. ..... محمد ابو عجيلة المبروك والسنوسى عبد الوهاب الأزهرى

4 - التطورات الحديثة فى تحليل الصفائح والقشريات. ..... صالح يحيى البارونى والطاهر قنابة

5 - تأثير درجات حرارة الدمك والاختبار على خواص مارشل لتصميم الخلطة الاسفلتية. ..... محمد الشتيوى عمر.

6 - التحلية كحل لمشاكل المياه بمدينة طرابلس. ..... محمد عبدالله المنتصر وحسن مختار زايد

7 - الترجمة والتعريب في الجماهيرية. ..... أحمد مختار بريرة وفخرى اسكندر

8 - نموذج رياضى لتقييم البرامج التدريبية الفنية. ..... عبد القادر الصادق عكى وموسى محمد موسى وفتحى رجب العكارى

9 - التحليل العددى لتدفق على أسطح مائلة (باللغة الانجليزية). ..... جمعة محمد الفلاح

10 - تحليل الصفائح الموضوعة على اساسات مطاطية (باللغة الانجليزية). ..... السنوسى عبد الوهاب الأزهرى.

التطوّرات الحديثة فى تحليل الصفائح والقشريات

د. صالح يحيى البارونى
استاذ الهندسة المدنية

د. طاهر حسين قنابه
استاذ مساعد الهندسة المدنية

قسم الهندسة المدنية ـ كلية الهندسة ـ جامعة الفاتح

اولاً: مقدمة:

لقد تطوّرت سبل التحليل الانشائى فى الثلاثين سنة الماضية تطوراً سريعاً حيث قد أحدث هذا التطوّر الهائل من جهة الطفرة التي حدثت في مجال الالكترونيات وبالذات فيما يخص أجهزة الحاسبات من ناحية الدقة والسرعة المتناهية فى العمليات الحسابية وسعة التخزين وصغر الاجهزة وانتشارها الى حد تعميمها على مستوى المدارس الابتدائية فى العالم المتطوّر، ومن جهة أخرى التوسّع الهائل فى مجال الانشاءات المختلفة والمعقّدة مثل المبانى المتعدّدة الطوابق ومبانى الألعاب الرياضية وقاعات العرض والخيالة والجسور والابراج والسدود والانفاق والخزانات ومبانى توليد الطاقة النووية.

لقد ظهرت طرق المصفوفات فى التحليل الانشائى وسرعان ما تطوّرت فى منتصف الستينات إلى ما هو متعارف عليه اليوم بطريقة العناصر المتناهية، إذ أن هذه الطريقة تعتمد أساساً على تقطيع المنشأ المستمر الى أجزاء أو عناصر صغيرة تلتقى فى نقاط محددة سواء على شكل هيكل أو صفائح مستوية ومنحنية أو قشريات تجمع خصائص هذه العناصر فى مصفوفات الجسوءة أو المطاوعة أو الازدواج وبتطبيق التوازن أو التوافق العام للمنشأ بما فى ذلك الشروط الحدودية يتم التحليل الانشائى وإيجاد الازاحات والقوى الداخلية.

لقد وجدت هذه الطريقة تطبيقات كثيرة جداً فى معظم فروع الهندسة حتى وصلت الى مرحلة اعتمادها كأحد النظريات فى مجال التحليل العددى الرياضى، وبذلك تكون قد فتحت باباً جديداً ومتطوراً فى مجال التحليل الانشائى يستطيع به المهندس تحليل بعض المنشآت المعقدة والتى كان فى السابق يصعب تحليلها ويعتمد فى تصميمها اما على طريقة التجريب أو المجسمات المعملية المصغرة، وكذلك فقد تمّ تطوير هذه الطريقة لتتعامل مع التحليل اللاخطى وعدم الاستقرار والاهتزازات فى المنشآت المختلفة.

يقدم البحث مراجعة للتطورات التى حدثت فى مجال التحليل الانشائى للصفائح والقشريات ابتداء بالطرق التحليلية الدقيقة المعتمدة على التحليل الكامل للمعادلات التفاضلية ومروراً بالطرق التقريبية وانتهاءً بالتحليل العددى وبالذات فى ما يتعلق بنظرية العناصر المتناهية، كما يتعرض البحث الى تطور الانواع المختلفة للعناصر المتناهية واستخداماتها فى تحليل الصفائح والقشريات بالاضافة الى بعض المقارنات.

وفى الختام تقدم الورقة بعض الاستنتاجات والتوصيات فى مجال استخدام طريقة العناصر المتناهية فى التحليل الانشائى فى الوطن العربى وتنمية القدرات البشرية والفنية فى هذا المجال.

ثانياً: تطورات الحلول الانشائية:

تعتبر الصفائح والقشريات من أهم المنشآت الهندسية التى تشكّل الهيكل الانشائى المقاوم للاحمال فى العديد من الانشاءات الثابتة والمتحركة، مثل أسقف صالات الترفيه والرياضة والعرض والخيالة والمصانع والانفاق والمفاعلات وأجسام الخزانات والسيارات والسفن والطائرات والصواريخ والمركبات الفضائية، وقد تزايد الاهتمام بتحليل هذه الانشاءات مع النهضة الصناعية والعمرانية التى يشهدها العالم بصفة عامة والتطور الذى حدث فى مجال صناعة الطائرات والصواريخ وبرامج الفضاء بصفة خاصة حيث تزامن هذا الاهتمام مع التطورات التى حدثت فى مجال الحاسبات الالكترونية، بحيث أصبح من الممكن تسخيرها للقيام

بالعمليات الحسابية المعقدة المطلوبة لتحليل مثل هذا النوع من الانشاءات.

يبدأ التحليل الانشائى بتمثيل سلوك الجسم تحت الاحمال المختلفة بحيز تحكمه معادلات تفاضلية عادية أو جزئية ومرتبطة بنوع المادة التى يشغرها الحيز وبعض الشروط المطلوب تحقيقها عند حدود الحيز وباستخدام مبادئ التوازن والتوافق اذ يمكن تقسيم طرق التحليل الانشائى الى ثلاثة مسالك رئيسية كما يلى:

أ ـ الطرق الدقيقة:

حيث يتم من خلالها ايجاد الحل الصحيح والمباشر للمعادلات التفاضلية مع تحقيق الشروط المطلوبة عند حدود الحيز ولكن منذ البداية وبالتحقق من نوعية المعادلات التفاضلية التى يتم استخدامها لتحكم سلوك الصفائح والقشريات تأكد بأن الحل الصحيح لهذه المعادلات غير ممكن وان وجد فإنه من الصعب تتبعه وتطبيقه فى كل الحالات بما فيها من اختلاف فى الاشكال والاحمال وشروط الحدود.

ولكن يمكن استخدامها لصفائح وقشريات ذات أشكال بسيطة وتحت تأثير قوى غير معقدة.

ب ـ الطرق التقريبية:

وهى الطرق التى تعتمد على دوال تجريبية وثوابت اختيارية كما فى طرق المتواليات العددية ورالى ريتز، الاّ أن الشرط الواجب توفره فى الدوال التجريبية ومن الصعب تحقيقه فى أغلب الاحيان هو تحقيق شروط حدود الحيز.

جـ ـ الطرق العددية:

مؤخراً أضحت الطرق العددية من أكثر الطرق استعمالاً فى تحليل الانشاءات الهندسية المختلفة وبالذات فى مجال المنشآت المستمرة مثل الصفائح والقشريات، وذلك نتيجة لتطور الحاسبات الالكترونية وزيادة سعة تخزينها وسرعتها فى القيام بالعمليات الحسابية المختلفة، وتعتبر طريقة الفرق المتناهى إحدى الطرق العددية المستخدمة فى حل مثل هذا النوع من المنشآت. والفكرة التي بنيت عليها هذه الطريقة هى تطبيق المعادلات التفاضلية عند نقاط معينة داخل الحيز المراد تحليله لايجاد منظومة معادلات الفرق الجبرية.

كما أن طريقة تكامل حدود الحيز وتعتمد على تكامل المعادلات التفاضلية لإيجاد منظومة معادلات التكامل الجبرية، هذا وخلال الثلاثة عقود الماضية برزت طريقة عددية جديدة عرفت بطريقة العناصر المتناهية والتى أصبحت من أكثر الطرق العددية استعمالاً من قبل المهندسين والباحثين فى المجالات الهندسية المختلفة.

والفكرة التى بنيت عليها هذه الطريقة هى تقسيم الحيز المراد تحليله الى أجزاء صغيرة تدعى العناصر المتناهية بحيث ترتبط هذه العناصر مع بعضها البعض فى نقاط مشتركة تسمى نقاط التلاقى كما هو موضح فى شكل رقم (1).

ثالثاً: نظرية العناصر المتناهية:

خلال الخمس عشرة السنة الأخيرة تطوّرت طريقة العناصر المتناهية تطوراً كبيراً، وقد ساهم فى هذا التطوّر التحقق من أسسها الرياضية وبذلك أمكن استخدامها فى العديد من المجالات الهندسية مثل ميكانيكا الانشاءات بأنواعها المختلفة وميكانيكا الموائع والمسائل الحرارية والصوتية والاهتزازات، كما أن حجم المعلومات المتوفرة فى هذا الجال أصبح غير محدود وذلك لظهور العديد من الكتب والبحوث والمؤتمرات التخصصية [1-10]. ويعتمد استنباط معادلات نظرية العناصر المتناهية على ثلاثة أسس باستخدام مبدأ الطاقة الصغرى الكامنة فى الجسم وذلك على النحو التالى:

1 ـ إستخدام نظريات الجسوءة والتى تؤدى الى تكوين مصفوفة الجسوءة للعنصر ويسمى هذا العنصر بعنصر الجسوءة.

2 ـ إستخدام نظريات المطاوعة والتى تؤدى الى تكوين مصفوفة المطاوعة للعنصر ويسمى هذا العنصر بعنصر المطاوعة.

3 ـ إستخدام نظريات الازدواج والتغير الرياضى والتى تؤدى الى تكوين مصفوفة العنصر المزدوج.

كورانت[11] اقترح استخدام عنصر مثلثى شبيه بذلك المستخدم حالياً فى طريقة العناصر المتناهية، بيد أن تيرنر ومجموعته[12] قدم طريقة العناصر المتناهية كما هى معروفة حالياً، حيث أنه باستخدام هذه الطريقة يتم تحويل الجسم

المستمر الى هيكل مكوّن من مجموعة عناصر تلتقى عند نقاط التلاقى فقط، وبالتالى تعتبر هذه الطريقة إمتداداً لطريقة المصفوفات المستخدمة فى حل المنشآت الهيكلية، وتمثيل سلوك المنشأ الخطى واللاخطى يمكن فرض دوال تمثل هذا التصرف داخل العنصر المتناهى، ومن أهم مزايا هذه الطريقة عدم حل المعادلات التفاضلية الجزئية المعقدة، اذ من خلال هذه الطريقة تنتج منظومة معادلات جبرية سهلة الحل، وكذلك سهولة معرفة السلوك الكامل للمنشأ بما فى ذلك معاينة الاجهادات والانفعالات التى تحدث داخل المنشأ.

طريقة العناصر المتناهية لا تختلف فى جوهرها عن طريقة رالى ريتز التقريبية، إلاّ أن الاختلاف الوحيد بين الطريقتين هو أن الدالة يجب أن تحقق شروط حدود الحيز فى حالة طريقة رالى ريتز، بينما هذا الشرط غير ضرورى للدول المستخدمة فى نظرية العناصر المتناهية والتى يمكن تحقيقها أثناء الحل، وبذلك تكون طريقة العناصر المتناهية أكثر شمولية وفعالية من طريقة (رالى ريتز) والطرق التقريبية الأخرى.

أ ـ خطوات الحل:

يمكن تلخيص الخطوات التى يجب إتباعها للتحليل باستخدام طريقة العناصر المتناهية كالآتي[13].

- تقسيم الحيز المراد تحليله الى عناصر متناهية واختيار العنصر المناسب للمنشأ المراد تحليله بما فى ذلك الدالة المطلوبة لتمثيل سلوك العنصر.
- إستنتاج مصفوفة العنصر المتناهى والمصفوفة العمودية للقوى المؤثرة باستخدام طريقة الاتزان او مبادئ التغيير الرياضى.
- تجميع مصفوفات العناصر المتناهية لإيجاد المصفوفة الكليّة للمنشأ.
- تحقيق حدود الحيز وذلك بتطبيق القيمة المدونة فى المعادلات المناظرة، ومن ثم تحليل منظومة المعادلات الجبرية لإيجاد المجاهيل وبالتالى ايجاد أي معلومات أخرى مطلوبة مثل الانفعالات والاجهادات.

ب ـ طريقة الحل:

يعتمد اختيار طريقة الحل على طبيعة منظومة المعادلات فالمعادلات الخطيّة يمكن حلها بطريقة مباشرة باستخدام طريقة جاوس أو طريقة تشالوسكى[13]. أما حل المعادلات الغير خطية فيتم بطريقة غير مباشرة باستخدام طريقة الحل التكرارى، وذلك بتجزئة القوى المؤثرة الى عدة أجزاء ووضع الجزء الأول من هذه القوى ثم حل منظومة المعادلات ويتم التأكد من الاتزان بين القوى المؤثرة والقوى الداخلية، وفى حالة تحقق التوازن يتم وضع جزء القوى الذى يليه، أما فى حالة عدم تحقق الاتزان فيوضع الفرق بين القوى المؤثرة والقوى الداخلية على المنشأ وذلك لتصحيح السلوك وهكذا.

ومن أكثر الطرق المستعملة فى هذا المجال طريقة (نيوتن رافسن[1]). حيث أن شكل رقم (2) يمثّل رسماً تقريبياً للحل التكرارى باستخدام طريقة (نيوتن رافسن).

رابعاً: الصفائح:

تدخل الصفائح فى انشاء العديد من المنشآت مثل السفن والطائرات والحاويات ومنصات استخراج النفط والمبانى والكبارى وهى عبارة عن مسطحات مستوية ويكون سمك الصفيحة صغيراً جداً مقارنة مع طولها وعرضها، كما يتكوّن سلوك الصفائح من السلوك الناتج عن العزوم والسلوك الغشائى كما فى شكل رقم (3).

هذا وقد بدئ فى وضع الأسس الرياضية للمعادلات التفاضلية التى تتحكّم فى سلوك الصفائح منذ القرن الثامن عشر حيث استنتج أويلر[14] معادلات مسألة اهتزاز غشاء، وفى القرن التاسع عشر أضاف كيرتشوف[15] تأثير العزوم الى التأثير الغشائى وبذلك وضع أسس ما يُعرف اليوم بالنظرية الكلاسيكية للصفائح أو نظرية كيرتشوف للصفائح. وقد بنيت هذه النظرية على الفرضية القائلة بأن المستوى العمودى على منتصف الصفيحة قبل وضع القوى عليها يبقى عمودياً بعد حدوث الإزاحات. وبذلك أهملت هذه النظرية تأثير القص العرضى. وقد قام العديد من الباحثين بمحاولات لتعديل النظرية الكلاسيكية بإدخال تأثير القص العرضى، ومن أهم هذه المحاولات تلك التى قام بها مندلين[16]، حيث اقترح فصل الازاحة العرضية عن الانحناء وفرض بأنهما مستقلان عن بعضهما البعض، وبذلك أمكن أخذ تأثير القص العرضى فى الاعتبار، والشكل رقم (4) يوضح فرضية مندلين، ولذلك سميت نظرية كيرتشوف المعدلة بنظرية مندلين للصفائح.

كيرتشوف استنتج المعادلات التفاضلية التى تحكم تصرّف الصفيحة عندما تكون الإزاحات صغيرة مقارنة بسمك الصفيحة، أما بالنسبة للإزاحات الكبيرة فقد تمّ استنتاج معادلاتها من قبل فون كارمن[17] فى بداية القرن العشرين، وهى عبارة عن معادلات تفاضلية جزئية غير خطية. وحل هذه المعادلات التفاضلية يتطلّب الكثير من الوقت والجهد وهو غير ممكن فى كثير من الحالات وبالذات عند استخدام الطريقة الدقيقة للتحليل وعندما يكون شكل الصفائح منتظماً.

ومنذ استحداث طريقة العناصر المتناهية اهتم الباحثون بتطوير عناصر متناهية لاستخدامها فى تحليل الصفائح. ولكل نظرية من نظريات الصفائح السابق ذكرها لها عناصرها المتناهية الخاصة بها والتى تتطلّب شروطاً معينة للحصول على نتائج واقعية. هناك شرطان يجب توفرهما فى الدوال المستخدمة للعناصر المتناهية المبنية على نظرية كيرتشوف للصفائح وهما: استمرارية الدالة والتفاضل الأول للإزاحة خلال الحد الفاصل بين عنصرين متناهيين متجاورين، وتسمى العناصر المتناهية التى يتوفر فيها هذان الشرطان عناصر متوافقة[18،19]. أما العناصر التى يتوفر فيها الشرط الأول فقط فتسمى عناصر غير متوافقة[20،21]. إذ يجب التنويه إلى أنه من الصعب ايجاد دوال تحقق الشرطين معاً، إلاّ أن التجارب العددية تبيّن على أنه هناك بعض العناصر الغير متوافقة والتى تخضع لما يعرف باختبار الحزمة تعطى نتائج جيدة[22،23]. كما تم تطوير عناصر مزدوجة وعناصر اجهاد، حيث أظهرت التجارب العددية أن هذه العناصر تعطى نتائج جيدة[24،25]. أما بالنسبة للعناصر المتناهية المبنية على نظرية مندلين فإن تحقيق الشرط الأول كافٍ، ولقد تمّ تطوير العديد من العناصر المتناهية مثل عناصر السرندبتى ولقرانج[26،27].

هذا وقد أظهرت التجارب العددية أن عناصر السرندبتى تعطى نتائج غير واقعية عند استخدامها فى تحليل صفائح رقيقة السمك وتعرف هذه الظاهرة بظاهرة القفل، أما عناصر لقرانج فإن عيبها هو قابلية هذه العناصر للحركة بدون انفعال. ومؤخراً تمكّن هيوز[28] من استنتاج عنصر يدعى عنصر الهتروسس يجمع بين خصائص عناصر السرندبتى ولقرانج وبذلك يمكن استخدامه فى تحليل صفائح رقيقة أو سميكة. وتبيّن الدراسات التى قام بها العديد من الباحثين بأن هذا العنصر من أفضل العناصر المتناهية والممكن استخدامها فى تحليل الصفائح باستخدام نظرية مندلين فى حالتى السلوك الخطى واللاخطى[29،30،31] وقد قام بيكا ومجموعته[29] بمقارنة النتائج المتحصل عليها من التحليل اللاخطى لصفائح رقيقة باستخدام عناصر خطية وسرندبتى ولقرانج وهتروسس. النتائج الموضحة بالجدولين (1، 2) تبيّن الإزاحة الرأسية والإجهاد عند مركز صفيحة مربعة الشكل مرتكزة على دعائم بسيطة ومؤثرة عليها بقوى موزعة منتظمة.

ومن الجدولين يمكن ملاحظة أن عنصر الهتروسس يعطى أقرب النتائج بالمقارنة مع النتائج المتحصل عليها من قبل رشتن[32] الذى حلل المعادلات التفاضلية.

خامساً: القشريات:

كما اشرنا فى السابق فإن القشريات تدخل فى تكوين الهيكل الانشائى المقاوم للاحمال فى عدد كبير من الانشاءات العامة والصناعية حيث أن المنشأ القشرى عبارة عن جسم منحنٍ مستمر يتم تحديد نقطة على السطح باستعمال الابعاد الثلاثة فى أية منظومة من المحاور والتى من الممكن أن تكون مستقيمة أو منحنية ومتعامدة وغير متعامدة، وهذا الجسم يشبه طبقة رقيقة لأن احد ابعاده صغير جداً بالنسبة للبعدين الآخرين ومن الممكن أن يكون ثابت السمك أو متغيراً. وعند تمثيله رياضياً بغرض التحليل الانشائى فإنه يتم الاستعاضة عنه بالمسطح المنحنى الفراغى المتوسط والمنصف لسمكه كما هو موضح بالشكل رقم (5).

ونظراً لخصوصية القشريات وما تمثله من أبعاد واشكال هندسية والاسلوب الذى تقاوم به الأحمال فإنها تختلف فى جوهرها عن الأجسام المرنة والجاسئة، كما فى شكل رقم (5)، مما اضطر المحللين إلى تطوير نظريات الأجسام الصلبة فى الابعاد الثلاثة، وقد تركز التحليل الانشائى فى عدة مجالات اهمها:

أ ـ نظرية الاغشية:

تمثل هذه النظرية أول محاولة جادة لتحليل المنشآت القشرية حيث أنها تفترض المنشأ القشرى رقيق جداً وأن

الشروط الحدودية للمنشأ أثرها موضعى، وبذلك تعتبر النظرية أنه عند تمثيل جسم المنشأ بمعادلات المسطح الفراغى الوسطى له فإن هذا المسطح يقاوم الاحمال بقوى واجهادات محورية فقط فى مستوى المسطح، كما فى شكل (5). إذ أن هذه الفرضيات تمكن من تحويل الجسم المستمر الغير محدد للمنشأ ومعادلاته التفاضلية المعقدة إلى مسألة محددة يمكن من خلالها ايجاد القوى الداخلية بمجرد استعمال معادلات التوازن. وقد تمّ تطبيق هذه النظرية بنجاح فى تحليل المنشآت القشرية الدورانية والتى من خواصها انها تمتلك انحناء جاوس الصفرى أو الموجب[33-35]، وعند تطبيقها فى المنشآت القشرية ذات الخواص الأخرى فانه يتطلّب الحيطة والتدقيق[36].

وقد ظهرت محاولات عدة فى مجال السلوك اللاخطى للأغشية اما من ناحية المادة الغشائية او الإزاحات[37،38]، مع العلم بأن هناك منشآت واقعية مقامة تماثل هذا السلوك كما هو الحال فى الانشاءات الغشائية الهوائية.

ب ـ نظرية الانحناء الخطى:

ترجع أولى المحاولات لايجاد نظرية الانحناء الخطى التقريبى للقشريات الرقيقة المرنة الى نهاية القرن الثامن عشر[39]، وذلك بأن وضع لاف بعض المحددات لنظريته بالإضافة لمحددات كيرتشوف[15]. بهذا نجد أن أسس نظرية التحليل الخطى للقشريات غالباً ما يشار اليها بفرضيات كيرتشوف ولاف، وأهم هذه الفرضيات أو المحددات هى عدم حساب تأثير قوى القص وأن المادة المكونة للمنشأ متجانسة والسمك صغير بالنسبة للأبعاد أو قطر الانحناء وكذلك فإن الانفعالات والإزاحات صغيرة.

كما قام الباحثون بعدة محاولات للتأكيد على نظرية لاف وتطويرها والإضافة عليها مثل رايسنر[40] الذى أعطى لها صورة جديدة، أما أكثر التطورات قابلية تتمثّل فى ما قدمه كويتر[41] وساندرز[42].

ولقد ظهر حديثاً مدخل جديد فى نظرية تحليل القشريات يعتمد على استعمال المتواليات والمماس المتناهى لاستنتاج المعادلات المتعلقة بحيز مميز فى بعدين بدلاً من ثلاثة أبعاد كما فى نظرية الأجسام الجاسئة[43،44]. ولمعرفة التطورات التى حدثت فى نظرية الانحناء الخطى فى القشريات فإن ناجدى[45] وكويتر[46] يقدمان مراجعة متوسعة مع عدد من المراجع لهذا الغرض.

ونظراً لما تشكّله القشريات الدورانية من طبيعة خاصة فإن معظم التطورات والتطبيقات فى نظرية القشريات قد طبقت بشكل أو بآخر على هذه المنشآت بصفة عامة أو طابع منها، مثل القشريات الاسطوانية[47] والقشريات القبيبة[48] والقشريات الاطارية[49] والقشريات ذات القطع الناقص[50].

جـ ـ الانحناء اللاخطى:

يرجع اساس تطوير الانحناء اللاخطى فى القشريات الى فون كارمن[17] الذى قدم المعادلات التفاضلية لسلوك الصفائح المقترنة بالإزاحات الكبيرة، وتبعه فى ذلك مجموعة من الباحثين فى مجال تطوير هذا السلوك ليشمل استقرار واهتزاز القشريات وسلوك القشريات قليلة الانحناء[51-55]. وكما حدث فى نظرية الانحناء الخطى فانه فى مجال سلوك الانحناء اللاخطى ولما تتميز به القشريات الدورانية فانه قد تم تطوير المعادلات التفاضلية والحلول الخاصة بأشكال محددة من القشريات الدورانية[56،57].

د ـ نظرية العناصر المتناهية:

بالإضافة للمحاولات والتطبيقات التى حدثت فى مجال نظرية العناصر المتناهية كما تم شرحها فى السابق فإن أولى المحاولات فى استعمال نظرية العناصر المتناهية فى تحليل القشريات كانت باستخدام العنصر المثلث المستوى، ولكن أثبت عدم جدواه لضرورة استعمال عدد كبير جداً من العناصر للوصول الى الحل التقريبى المناسب، اضافة الى أن التداخل بين العزوم والقوى المحورية غير موجود فى مثل هذا العنصر. لذلك فإن عنصراً قشرياً تم تطويره كان لغرض تحليل القشريات الدورانية وباستخدام عنصر الجسوءة على شكل مخروط مقطوع[58] وبعدها تم تطوير هذا العنصر ليكون على شكل منحنى[59] كما هو موضح بالشكل رقم (6أ) وبنفس الأسلوب تم تطوير العنصر المزدوج المخروطى والمنحنى[60-62]. كما أخذت القشريات الاسطوانية جانباً كبيراً من التطبيق وتطوير العناصر وذلك لمتطلبات الاستعمال في مجالات عدة ووجود الحلول الدقيقة للمقارنة بها[63].

أما فى مجال تطوير عناصر يمكن تطبيقها على القشريات ذات الأشكال العامة والانحناءات البسيطة والكبيرة فإن العنصر ذو المسقط المربع والمعين وأقطار الانحناء المختلفة، كما فى شكل رقم (6ب) قد مثل أحد الجوانب الرئيسية[64،65]، والجانب الآخر هو العنصر مثلث المسقط ومنحنى الحدود كما فى شكل رقم (6.جـ) بما فى ذلك استخدام العنصر المزدوج وعنصر الاجهاد[66،67].

كما استخدم العنصر المسمى ايزو برميترك فى تطبيقات عدة فى القشريات[68]. وكذلك فقد تم استخدام نظرية العناصر المتناهية فى مجال السلوك اللاخطى للقشريات وباستعمال عناصر مختلفة[69]. وللحصول على معلومات أكثر بما فى ذلك مراجعة وتقييم تطورات استخدام العناصر المتناهية فى تحليل القشريات يمكن العودة الى المراجع المختلفة[1-10].

الجدول رقم (3) يبيّن مقارنات بين النتائج المستخرجة من استعمال بعض العناصر المختلفة فى تحليل منشأ قشرى اسطوانى تحت تأثير الأحمال المتماثلة[62،61،64]. كما ان الجدول رقم (4) يبيّن كذلك مقارنات بين النتائج المستخرجة من استعمال بعض العناصر المختلفة فى تحليل منشأ قشرى اسطوانى تحت تأثير أحمال مركزة[69].

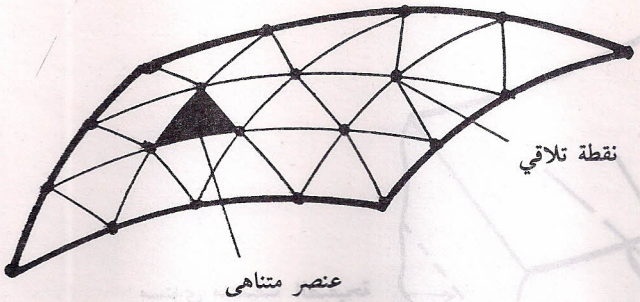
سادساً: الخلاصة والتوصيات:

تبيّن من الورقة المقدمة بأن الصفائح والقشريات ذات طبيعة خاصة تختلف عن الهيكليات الانشائية الأخرى من ناحية السلوك والإستخدامات وبذلك فقد تطورت نظريات للتحليل الإنشائى خاصة بها وبالذات فى ما يتعلّق بنظرية العناصر المتناهية، لذلك نورد الملاحظات والتوصيات التالية:

1) إن التحليل الإنشائى للصفائح والقشريات باستخدام الطرق الدقيقة محدد فى تطبيقاته لأشكال غير معقدة واحمال بسيطة فقط.
2) الطرق التقريبية تتطلّب ايجاد دوال تحقق شروط الحيز وهذا الشرط صعب التحقيق فى حالات عدة ولذلك يقتصر استخدامها على اشكال بسيطة ومنظمة من الصفائح والقشريات.
3) لطريقة العناصر المتناهية أسس رياضية وبذلك يمكن استخدامها فى حل العديد من المسائل الهندسية التى تحكمها معادلات تفاضلية فى مجال حيز معين.
4) طريقة العناصر المتناهية اكثر شمولية وفاعلية من الطرق التقريبية فى تحليل الصفائح والقشريات بأشكال متعددة وتحت تأثير احمال مختلفة، وذلك لأن الشروط الواجب توفرها عند حدود الحيز يمكن تحقيقها أثناء الحل، كما يمكن ايجاد وتطبيق العديد من دوال العناصر المتناهية.
5) على الرغم من وجود العديد من العناصر المتناهية الممكن استخدامها فى تحليل الصفائح، فإن عنصر الهتروسس يعتبر من أحسن العناصر المتناهية.
6) لقد تم تطوير العديد من العناصر المتناهية الممكن استخدامها فى تحليل القشريات لكن يصعب اختيار عنصر واحد مناسب، وذلك للاختلاف الواضح فى اشكال القشريات وتأثير الأحمال عليها.
7) على الرغم من وجود العديد من البرامج التجارية الجاهزة لتحليل الصفائح والقشريات ولكن يتطلّب الأمر التعرف على المنشأ وطبيعة الأحمال وتوقعات سلوكه، وبالتالى يجب اخذ الحيطة فى كيفية تجزئة المنشأ ودراسة النتائج المستخدمة بدقة.
8) التحليل الانشائى بطريقة العناصر المتناهية يتطلّب التعامل مع الحاسبات الالكترونية ذات سعة تخزين كبيرة وهذا يستدعى التدريب فى مجال البرمجة والمصفوفات وكيفية ادخال وتخزين واستخراج المعلومات.
9) نظراً لما تشهده المنطقة العربية من حركة تنموية كبيرة تتطلّب التعامل مع تقنيات متقدمة فى مجال البناء والتشييد وكذلك الصناعات المتطورة وبالذات فى ما يخص التحليل الإنشائى للصفائح والقشريات فإن الأمر يتطلّب ضرورة التقاء المختصين العرب فى مجال نظرية العناصر المتناهية لتأهيل المهندسين على مستوى الوطن العربى. وكذلك اقامة الندوات والمؤتمرات العلمية.

جدول (1) ـ مقارنة الإزاحة الرأسية بين عناصر مندلين لصفيحة مربعة مرتكزة على دعائم بسيطة وتحت تأثير قوى موزعة[32].

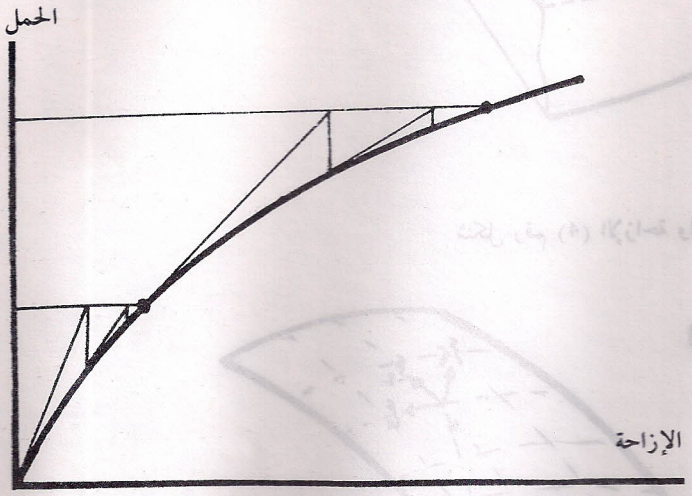
الحمل	الحل الدقيق	طريقة العناصر المتناهية		
		عنصر سرندبتى	عنصر لقرانج	عنصر الهتروسس
9,16	0,335	0,3478	0,3480	0,3478
146,5	1,470	1,4655	1,4657	1,4655
2344	3,83	3,8124	3,8134	3,8128



شكل رقم (1) رسم كروكى للعناصر المتناهية ونقاط التلاقى.

جدول (2) ـ مقارنة الاجهادات عند مركز الصفيحة بين عناصر مندلين لصفيحة مربعة مرتكزة على دعائم بسيطة وتحت تأثير قوى موزعة[32].

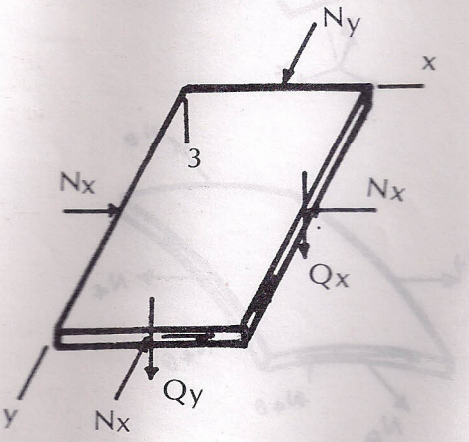
الحمل	الحل الدقيق	طريقة العناصر المتناهية		
		عنصر سرندبتى	عنصر لقرانج	عنصر الهتروسس
9,16	2,46	2,6214	2,6029	2,6016
146,5	14,5	14,6440	14,635	14,6150
2344,0	65,2	65,6730	65,756	65,661



شكل رقم (2) رسم كروكى لطريقة نيوتن رافسن.

جدول (3) ـ مقارنة بين الإزاحة القطرية القصوى لاسطوانة تحت تأثير حمل متماثل مركز فى نهايتها[62].

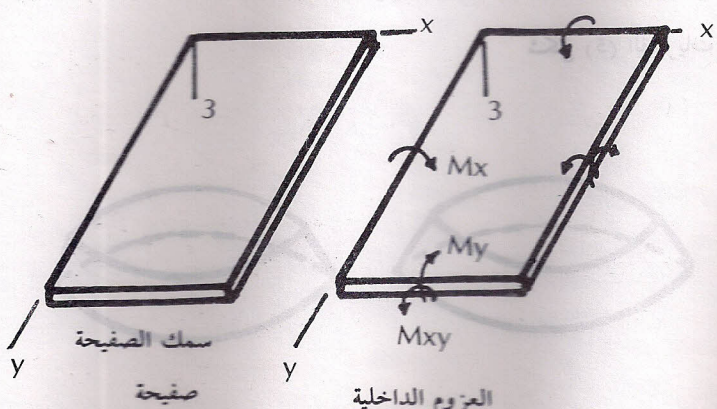
الحل الدقيق	تسعة عناصر		أربعة عشر عنصراً	
	مرجع (4)	مرجع (62)	مرجع (4)	مرجع (62)
2,874	2,815	2,880	2,861	2,871



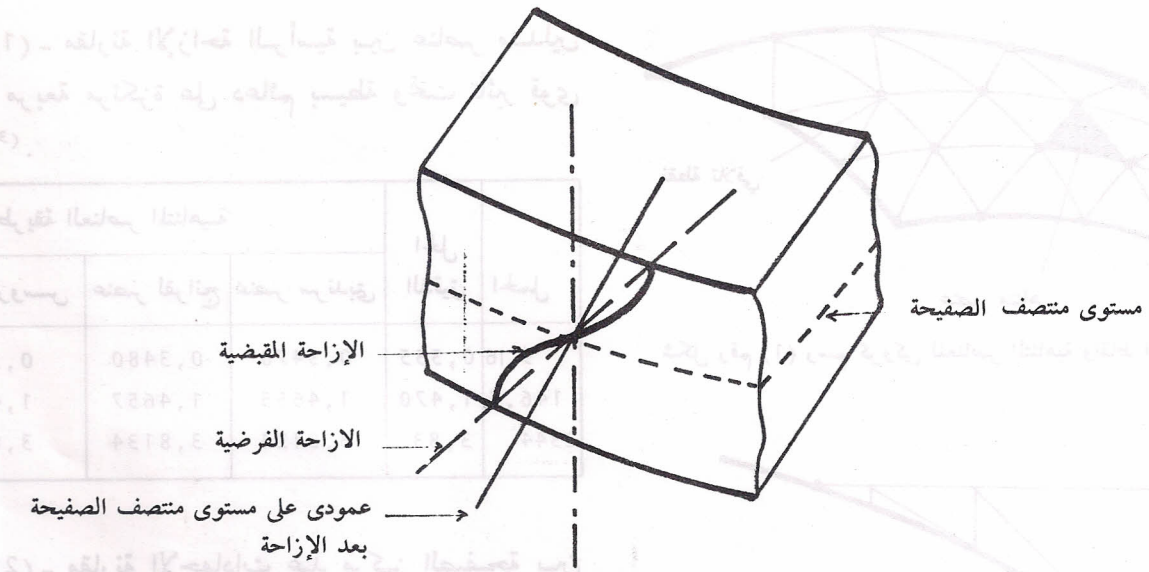
القوى الداخلية المحورية وقوى القص

جدول (4) ـ مقارنة بين الإزاحة القطرية القصوى لاسطوانة تحت تأثير حمل مركز[9].

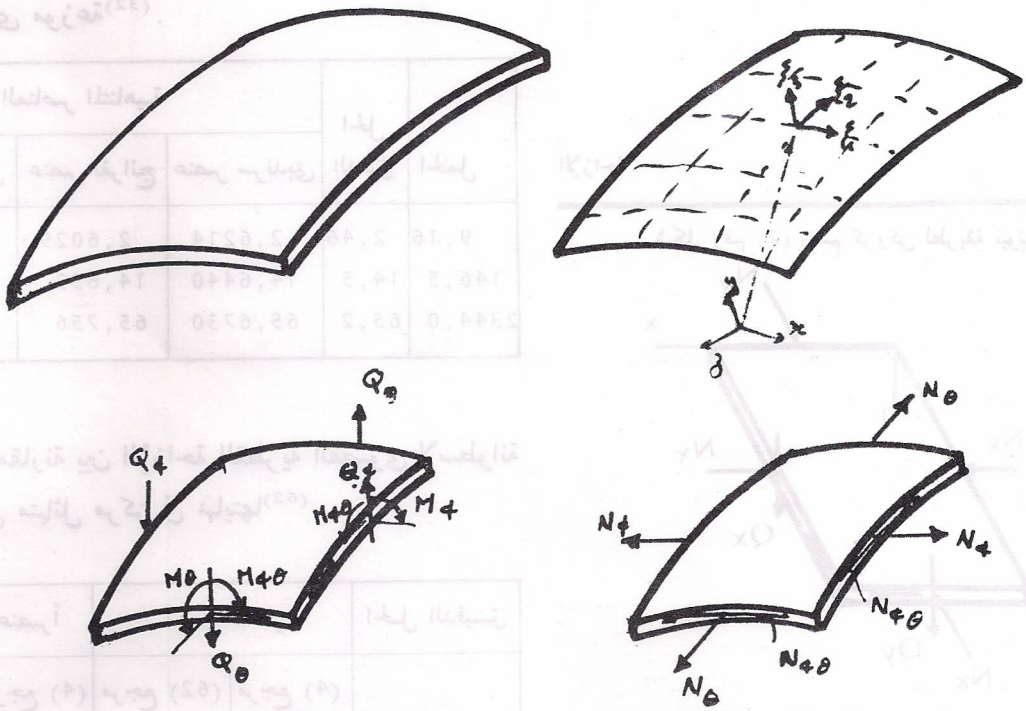
عدد العناصر	مرجع (63)	مرجع (67)	الحل الدقيق
1×1	0,00001	0,000003	0,02439
1×4	0,00074	0,02327	
1×8	0,00700	0,02467	



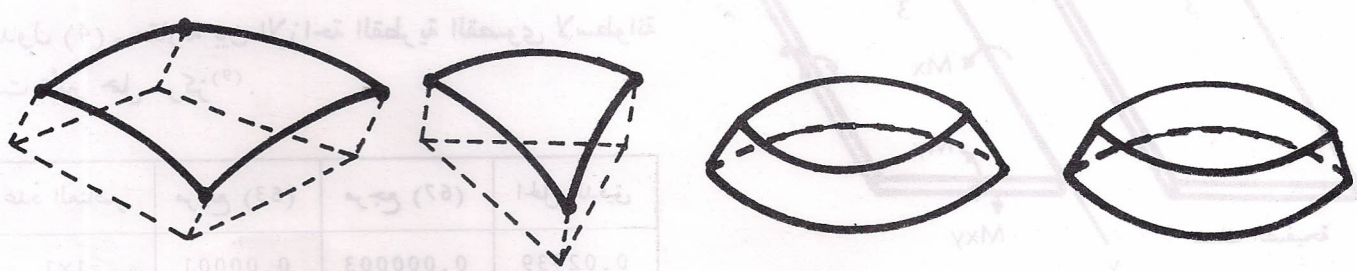
شكل رقم (3) صفيحة والقوى المؤثرة عليها.



شكل رقم (4) الإزاحة والانحناء فى نظرية مندلين.



شكل (5) القشريات والقوى المؤثرة عليها.



شكل (6) بعض العناصر المتناهية للقشريات.

REFERENCES:

1 - Zienkiewicz, O.C., «The Finite Element Method», McGraw Hill London, 1967.
2 - Oden, J.T., «Finite element for nonlinear continual», McGraw Hill, New York, 1972.
3 - Gallagher, R.H., «Finite element analysis: fundamentals», Prentice Hall, New York, 1975.
4 - Rocky, K.C., Evans, H.R., Griffiths, D.W. and Nethercot, D.A., «The finite element method: a basic introduction, Crosby Lockwood Staples, London, 1975.
5 - Cook, R.D., «Concepts and Applications of finite element analysis», Wiley, New York, 1974.
6 - Weaver, W. and Johston, P.R., «Finite elements for Structural Analysis», Prentice Hall, 1984.
7 - Pian, T. and Tong, P., «Basis of finite element methods for Solid Continual», Int. J. Num. Methods Eng., Vol.1, pp.3-28, 1969.
8 - Spooner, J.B., «History of the finite element method», Proceedings of World Congress on finite elements method in Structural Mechanics, Bourenmouth, England, 1975.
9 - Ashwell, D.G. and Gallagher, R.H., «Finite elements for thin shells and curved members», Wiley, Lndon, 1976.
10 - Atluri, S.N., Gallagher, R.H. and Zienkiewicz, O.C., «Hybrid and mixed finite element methods», Wiley, London, 1983.
11 - Courant, R., «Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations», Bulletin of American Mathematical Society, pp.1-23, 1943.
12 - Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. and Topp, L.J., «Stiffness and deflection analysis of complex structures», Journal of Aero Sc., pp.805-824, 1956.
13 - Rao, S.S., «The finite element method in Engineering», Pergamon, Oxford, 1982.
14 - Euler, L., «De Motu Vibrotorio tympanorum», Novi Commentari Acad. Petropolit, pp.243-260, 1766.
15 - Kirchhoff, G., «Verlesungen uber mathematische physik», Teubrer, Vol.1, 1876.
16 - Mindlin, R.D., «Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates», Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.18, pp.31-38, 1951.
17 - Von Karman, «Festigkeitsprobleme im Maschinenbau», Encycl. der Math., pp.348-351, 1910.
18 - Clough, R.W. and Tocher, J.L., «Finite element matrices for analysis of plates in bending», Proc. conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson, A.F. Base, Ohio, 1965.
19 - Clough, R.W. and Falippa, C.A., «A refined quadrilateral element for analysis of plate bending», Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air force Inst. of Tech., Wright Patterson, A.F. Base, Ohio, 1968.
20 - Melosh, R.J., «Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method», J.A.I.A.A., pp.1631-1637, 1963.
21 - Tocher, J.L. and Kapur, K.K., «Comment on basis of derivation of matrices for direct stiffness method», J.A.I.A.A., 3, pp.1215-1216, 1965.
22 - Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C., «Triangular elements in binding conforming and non-conforming solutions», Proc. of the Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air force Institute of Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.
23 - Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K., «The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs», Proc. of the Inst. of Civ. Eng., Vol.28, pp.471-488, 1964.
24 - Severn, R.T. and Taylor, P.R., «The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed», Proc. Inst. Civ. Engrs., 34, pp.153, 1966.
25 - Herrmann, L.R., «Finite element bending analysis of plates», Proc. ASCE, Journal of Eng. Mech. Div., 93, pp.13-26, 1967.
26 - Pugh, E.D.L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C., «A study of quadrilateral plate bending element with reduced integration», Int. J. Num. Math. Eng., 12, pp.1059-1079, 1978.
27 - Hinton, E. and Bicanic, N., «A comparison of Lagrangian and serendipity mindlin plate elements for free vibration», Computers and Structures, 10(3), pp.483-493, 1979.
28 - Hughes, T.J.R. and Cohen, M., «The Heterosis finite element for plate bending», Computers and Structures, 9(5), pp.445-450, 1978.
29 - Pica, A., Wood, R.D. and Hinton, E., «Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a Mindlin formulation», Computers and Structures, 11, pp.203-215, 1980.
30 - Yang, R.J. and Bhatti, A., «Nonlinear static and dynamic analysis of plates», Journal of Eng. Div., ASCE, 111, No.2, pp.175-187, 1985.
31 - Ganaba, T.H., «Nonlinear finite element analysis of Plates and slabs», Ph.D. Thesis, The University of Warwick, England, 1985.

32 - Rushton, K.R., «Large Deflection of Plates with Initial Curvature», Int. J. Mech. Sci., 12, pp.1037-1051, 1970.

33 - Truesdell, C., «The membrane theory of shell of revolution», Trans. Amer. Math. Soc., 58, pp.96-166, 1945.

34 - Timoshinko, S. and Woinowsky Krieger, S., «Theory of Plates and Shells», Springer-Verlag, 1973.

35 - Kraus, H., «Thin elastic shells», Willey, New York, 1967.

36 - Flugge, W. and Gelying, F., «A general theory of deformation of membrane shells», Int. Assoc. of Bridges and Struct., 17, pp.23-45, 1957.

37 - Bromberg, E. and Stoker, J., «Nonlinear theory of curved elastic sheets», Q. App. Math., III, pp.246-265, 1945.

38 - Leonard, J., «Inflatuble shells: Pressurization phase», J. Eng. Mech. Div., ASCE, 93, pp.207-227, 1967.

39 - Love, A., «On the small free vibrations and deformations of thin elastic shells», Phil. Trans. Roy. Soc., London, 17-A, pp.491-546, 1888.

40 - Reissner, E., «A new derivation of the equation for deformations of elastic shells», Am. J. Math., 63, pp.177-184, 1941.

41 - Koiter, W., «A consistant first approximation in the general theory of thin elastic shells», Proc. of the 1st symposium on the theory of thin shells, Delft, Netherland, 1959.

42 - Sandres, J., «An improved first approximation theory for thin shells», NASA Report, 24, 1959.

43 - Golden Veizer, A.L., «The principle of reducing three dimensional problems of elasticity to two dimensional problems of the theory of plates and shells», Proc. of 11th Congress of App. Mech., pp.306-311, Berlin, 1964.

44 - Westbrook, D.R., «An assymptotic investigation of the small strain theory of shells», Int. J. Solids Struct., 7, pp.901-912, 1971.

45 - Naghdi, P.M., «A survey of recent progress in the Theory of elastic shells», App. Mech. Review, 9, pp.365-368, 1956.

46 - Koiter, W., «Foundations of basic equations of shell theory - A survey of recent progress», Proc. of 2nd symposium on the theory of thin shells, Copenhagen, 1967.

47 - Simmond, J.G., «A set of simple accurate equations for circular cylindrical shells», Int. J. Solids and Struct., 2, pp.525-541, 1966.

48 - Reissner, E., «Stress and small displacements of shallow spherical shells», Int. J. Math. Phys., 25, pp.279-301, 1946.

49 - Clark, R.A., «On the theory of thin elastic toroidal shells», J. Math. Phys., 29, pp.146-178, 1950.

50 - Naghdi, P.M., and Desilva, C.N., «Deformations of elastic ellipsoidal shells of revolution», Proc. 2nd U.S. National Congress App. Mech., pp.333-343, 1955.

51 - Kaplan, A. and Fung, Y., «A nonlinear theory of bending and buckling of thin elastic shallow spherical shells», NASA-TN-3212, 1954.

52 - Sandres, J., «Nonlinear theory of thin elastic shells», Q. App. Math., 21, pp.21-36, 1963.

53 - Naghdi, P.M. and Nordgren, R.P., «On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchoff hypothesis», Q. App. Math., XXI, pp.49-59, 1963.

54 - Stern, M., «An approximate shell theory for unrestricted elastic deformations», Int. J. Solia´sa´Structures, 3, pp.905-925, 1967.

55 - Koiter, W., «On the nonlinear theory of thin elastic shells.» Proc. of the Kon. Med. Ak. on Wet. series B, 69, Amesterdam, 1966.

56 - Reissner, E., «On axisymmetric deformations of thin shells of revolutions», Proc. Symp. App. Math., pp.27-52, 1950.

57 - Simmons, R.M., «A power series solution of the nonlinear equations of axisymmetric bending of shallow spherical shells», J. Math. Phys. 36, pp.209-231, 1959.

58 - Mayer, R.R. and Herman, M.B., «Conical segment method for analyzing open crown shells of revolution for edge loading» AIAA Journal, 1, pp.886-891, 1963.

59 - Jones, R. and Strome, D., «Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curved elements», AIAA Journal, 4, pp.1519-1525, 1966.

60 - Elias, Z., «Mixed finite element methods for axisymmetric shells», Int. J. Num. Methods Eng., 4, pp.261-277, 1972.

61 - Barony, S.Y. and Tottenham, H., «The analysis of rotational shells using a curved ring element and the mixed variational formulation», Int. J. Num. Methods Eng., 10, pp.861-872, 1976.

62 - Tottenham, H. and Barony, S.Y., «Refined mixed finite element formulation for axisymmetric analysis of shells of revolution», Proc. symposium on Application of Computer Methods in Eng., USC, Los Angeles, 1977.

63 - Cantin, G. and Clough, R., «A curved cylindrical shell finite element», AIAA Journal, 6, pp.1057-1062, 1968.

lar shell finite element: Linear analysis», NASA, CR-2482, 1975.
68 - Iron, B.M. and Rassaque, A., «The evaluation of the isoparametric elements», Proc. World Congress on Finite Element Method in Structural Mech., Bournmouth, England, 1975.
69 - Martin, H.C., «Finite element and the analysis of geometrically nonlinear problems», Recent Advances in Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Edited by Gallagher, 1971.
64 - Connor, J. and Brebbia, C., «Stiffness matrix for shallow rectangular shell element», ASCE, Eng. Mech. Div., 93, pp.43-65, 1967.
65 - Leonard, J.W. and Li, C.T. «Strongly curved finite elements for shell analysis», ASCE, Eng. Mech. Div., 99, pp.515-535, 1973.
66 - Prato, C., «Shell finite element method via Reissner Principle.» Int. J. Solids Structures, 5, pp.1119-1133, 1969.
67 - Thomas, G.R. and Gallagher, R.H., «A triangu-