مجلة البحوث الهندسية

العدد الثاني — الكانون (ديسمبر) — 1991

مجلة البحوث الهندسية تصدر دوريا عن مركز بحوث العلوم الهندسية - طرابلس/ الجماهيرية

1 - مقارنة بين استعمال طريقة المعاملات والطريقة المباشرة فى تصميم البلاطات الخرسانية المسلحة ذات الاتجاهين والمحمولة على عوارض. ..... محمود عبد الرحمن القلهود

2 - التغير فى القصور الذاتى للذراعيات مستطيلة القطاع. ..... مصطفى محمد الطويل

3 - دراسة صخور خواص البازلت واستخداماتها فى الخلطات الخرسانية. ..... محمد ابو عجيلة المبروك والسنوسى عبد الوهاب الأزهرى

4 - التطورات الحديثة فى تحليل الصفائح والقشريات. ..... صالح يحيى البارونى والطاهر قنابة

5 - تأثير درجات حرارة الدمك والاختبار على خواص مارشل لتصميم الخلطة الاسفلتية. ..... محمد الشتيوى عمر.

6 - التحلية كحل لمشاكل المياه بمدينة طرابلس. ..... محمد عبدالله المنتصر وحسن مختار زايد

7 - الترجمة والتعريب في الجماهيرية. ..... أحمد مختار بريرة وفخرى اسكندر

8 - نموذج رياضى لتقييم البرامج التدريبية الفنية. ..... عبد القادر الصادق عكى وموسى محمد موسى وفتحى رجب العكارى

9 - التحليل العددى لتدفق على أسطح مائلة (باللغة الانجليزية). ..... جمعة محمد الفلاح

10 - تحليل الصفائح الموضوعة على اساسات مطاطية (باللغة الانجليزية). ..... السنوسى عبد الوهاب الأزهرى.

التغير فى القصور الذاتى للذراعيات مستطيلة القطاع

د. مصطفى محمد الطويل
أستاذ الهندسة المدنية
قسم الهندسة المدنية ـ كلية الهندسة ـ جامعة الفاتح

1 ـ مقدمة

تشتمل الانشاءات الهندسية بصفة عامة على عناصر كالقواعد والأعمدة والعوارض والذراعيات والأسقف والأرضيات والجدران والأسطح المستوية والمنحنية، ولكل عنصر من هذه العناصر الخواص اللازمة لقطاعاته التى تمثله.

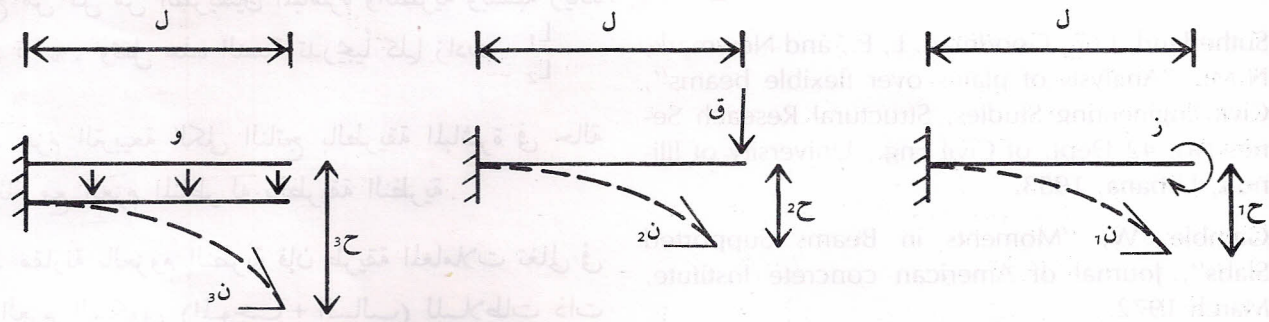
إن القصور الذاتى ضرورى جداً لمعرفة دوران وإزاحة أية نقطة واقعة على العنصر المتعرض للأحمال الواقعة عليه بصفة مباشرة أو غير مباشرة، وكذلك للتعامل مع الانشاءات التى لا يمكن إيجاد ردود الفعل الخارجية أو القوى الداخلية فيها أو الاثنين معاً عن طريق استعمال قوانين السكونيات وحدها والتى يشار لها بالانشاءات غير المحددة سكونياً. يعتمد القصور الذاتى لعنصر انشائى على أبعاد قطاعاته، وبالتالى سيكون مقداره ثابتاً إذا أثبتت الأبعاد أو متغيراً إذا تغيرت، ومن السهل التعامل مع العناصر ثابتة المقطع الا أنه يصعب فى بعض الحالات عندما يكون القطاع متغيراً مما يضطر المحلل الانشائى الى استعمال حلول تقريبية من أجل الوصول الى الحل الكامل والمطلوب.

تتعرض هذه الورقة الى الذراعيات، وهى العوارض المثبتة فى أحد أطرافها وحرة فى الطرف الآخر، كعنصر من عناصر الانشاء على اعتبار أنها مستطيلة القطاع ومتغيرة العمق تغيراً خطياً فى ما بين الطرف الحر والطرف المثبت، ومتعرضة لتأثير ثلاثة أحمال مختلفة عليها حيث يتم استنتاج دوال جبرية تعطى العمق البديل والذى يمثل عنصراً مماثلاً للعنصر الأصلى ولكنه ثابت القصور الذاتى يسهل التعامل معه على أساس العنصر الواحد.

2 ـ تشكل الطرف الحر فى الذراعيات ثابتة القصور الذاتى

يمثل الدوران والازاحة فى الطرف الحر للذراعيات القيم القصوى لهذه التشكلات عبر العنصر الانشائى فى حالة التعرض للأحمال ذات التأثير الانحنائى الواحد، ويتم هنا دراسة ثلاثة أنواع من هذه الأحمال (شكل 2 ـ 1)، وترمز الرموز الى ما يلى:

ز عزم انحناء مركز عند الطرف الحر.
ق قوة مركز عند الطرف الحر متامدة على محور الذرعية الطولى.
و قوة موزعة بانتظام وثابتة على الطول الكامل للذراعية.



شكل (2 ـ 1) تحميل الذراعيات

نجد من المبادئ الأساسية لحساب التشكلات فى الذراعيات ثابتة القصور الذاتى القيم التالية:

$$ن_1 = ن_ل / ى ر$$
$$ن_2 = ق_ل^2 / 2ى ر$$
$$ن_3 = و_ل^3 / 6ى ر$$
$$ح_1 = ن_ل^2 / 2ى ر$$
$$ح_2 = ق_ل^3 / 3ى ر$$
$$ح_3 = و_ل^4 / 8ى ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-1)$$

حيث $ن_1$، $ن_2$، $ن_3$ الدوران عند الطرف الحر للذراعيات.

$ح_1$، $ح_2$، $ح_3$ الازاحة الرأسية عند الطرف الحر للذراعيات.

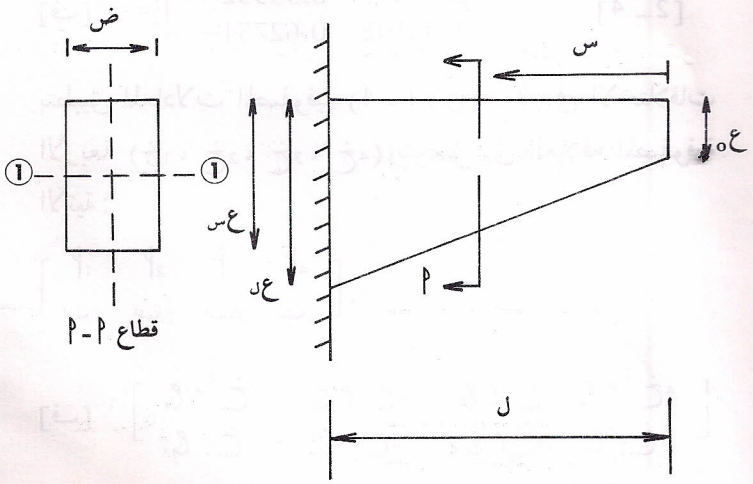
ل طول الذراعية.

ى معامل يانغ للمرونة.

ر عزم القصور الذاتى لقطاع الذراعية.

3 ـ الذراعيات ذات القطاع المستطيل متغير العمق خطياً

تقتصر هذه الدراسة على التعرض للذراعيات مستطيلة القطاع بعرض ثابت وبتغير خطى فى العمق ويزيد العمق فى ما بين الطرف الحر والى غاية الطرف المثبت (شكل 3 ـ 1).



شكل (3 ـ 1) أبعاد الذراعية

يمكن حساب القصور الذاتى للقطاع (ر ـ ر) والذى يبعد مسافة (س) عن الطرف الحر للذراعية حول المحور الأفقى ① ـ ① كما يلى:

$$ر_س = ض ع_س^3 / 12$$

وحيث أن القصور الذاتى عند الطرف الحر هو:

$$ر_٥ = ض ع_٥^3 / 12$$

فتكون العلاقة بين القيمتين هى:

$$ر_س / ر_٥ = (ع_س / ع_٥)^3$$

إن العلاقة التى تربط التقوس بعزم الانحناء عند القطاع (س) هى:

$$و^2ح / وس^2 = - (ن_س / ى ر_س)$$

أو $$(ى ر_٥)(و^2ح / وس^2) = - ن_س (ر_٥ / ر_س) \quad \ldots\ldots (3-1)$$

حيث $و^2ح / وس^2$ التفاضل الثانى للازاحة (ح) بالنسبة للمتغير المستقل (س)

$ن_س$ عزم الانحناء عند (س) والناتج من الحمل المؤثر على الذراعية.

وبتكامل المعادلة التفاضلية العادية (3 ـ 1) مرتين بالنسبة للمتغير (س)، وبمعرفة المعطيات الحدودية للذراعية ومنها الدوران والازاحة عند الطرف المثبت والتى تساوى صفراً، فيمكن استنتاج الدوران (ن) والازاحة (ح) لأى نوع من الأحمال.

حيث $ن = وح / وس$

ولكى يتم تكامل المعادلة (3 ـ 1) يجب معرفة تغير $(ر_س)$ بالنسبة للمتغير (س)، وعليه فقد تم اتباع الخطوات التالية:

نجد من تغير عمق القطاع (شكل 3 ـ 1) أن:

$$س / ل = (ع_س - ع_٥) / (ع_ل - ع_٥)$$

واذا افترض أن:

$$(ع_ل - ع_٥) / ع_٥ = م$$

فإن: $$س / ل = (ع_س - ع_٥) / م ع_٥$$

أو $$س / ل = (ع_س / ع_٥ - 1) / م$$

أي ان $$ع_س / ع_٥ = م (س / ل) + 1$$

ولكن $$ر_س / ر_٥ = (ع_س / ع_٥)^3$$

$$ر_س / ر_٥ = [م(س / ل) + 1]^3$$

وتصبح المعادلة (3 ـ 1) فى صورة:

$$(ى_{سه})(ع^2 ح / ع سه^2) = -ر_{سه} / [م(سه / ل)+1]^3 \ldots (2-3)$$

تعطى الجداول (3 ـ 1، 3 ـ 2، 3 ـ 3) الكميات الفعلية للدوران والازاحة عند الطرف الحر للذراعيات فى العمودين الثانى والخامس على التوالى، ولكل حمل من الأحمال المشار اليها فى شكل (2 ـ 1) وذلك بعد تكامل المعادلة التفاضلية العادية (3 ـ 2) وبعشر قيم للمتغير (م).

إن هذه القيم الفعلية للدوران والازاحة لو وضعت فى المعادلات (2 ـ 1) لأمكن استنتاج قيم عزم القصور الذاتى الثابت ($ر$) لذراعية بديلة، ومن المعلوم أن هذه القيم ستقع فى ما بين ($ر_{ه}$ و $ر_{ل}$).

حيث $ر_{ل}$ عزم القصور الذاتى للقطاع عن الطرف المثبت للذراعية. ولتحديد موقع العمق البديل يتم تعويض قيم ($ر$) فى قيم ($ر_{سه}$) فى العلاقات التالية:

$$سه / ل = (ع_{سه} / ع_{ه} - 1) / م$$

$$سه / ل = \left(\sqrt[3]{ر_{سه} / ر_{ه}} - 1\right) / م \ldots (3-3)$$

تعطى الجداول (3 ـ 1، 3 ـ 2، 3 ـ 3) قيم (سه / ل) حيث موقع العمق البديل وذلك فى العمودين الثالث والسادس. كما يعطى العمودان الرابع والسابع الفروقات بين هذه القيم وموقع المركز الهندسى لتبيان عزم الانحناء وتبيان تكامله، كما هو مبين بالرسومات المرافقة للجداول.

4 ـ استنتاج العمق التقريبى البديل للعنصر متغير القصور الذاتى

يلاحظ من الرسومات المرافقة للجداول (3 ـ 1، 3 ـ 2، 3 ـ 3) أن المراكز الهندسية لتباين عزم الانحناء وتباين تكامل هذه العزوم تتبع نظاماً معيناً وتعتمد كما هو معلوم على نوعية التحميل. كما يلاحظ من الجداول أن العمق البديل للازاحة فى الجدول (3 ـ 1) هو نفس العمق البديل للدوران فى الجدول (3 ـ 2) وأن العمق البديل للإزاحة فى الجدول (3 ـ 2) هو نفس العمق البديل للدوران فى الجدول (3 ـ 3) وهكذا.. وقد جاء ذلك لتشابه التباين المرفقة ذات العلاقة.

إذا تم الانطلاق من أن موقع المركز الهندسى للتبيان المعنى يمثل الجزء الثابت (ج) فى دالة تقريبية للمتغير (س/ل)، أى ان:

$$س / ل \cong ج - د(م)$$

وباعتبار أن $د(م) \cong أ م^2 + ب م$

فإنه يمكن ايجاد الثوابت أ و ب باستعمال طريقة المربعات الأقل للأخطاء وفى صورة المصفوفات بالشكل الآتى:

$$\begin{Bmatrix} أ \\ ب \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ج م^4 & ج م^3 \\ ج م^3 & ج م^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{Bmatrix} ج م^2 > (م) \\ ج م > (م) \end{Bmatrix} \ldots\ldots (4-1)$$

حيث ج تمثل مجموع الفئات المعطاة.

إن المصفوفة المربعة فى المعادلة (4 ـ 1) تعتبر ثابتة لكل حالات التحميل حيث كونها تمثل فقط خاصية شكلية للذراعية، ويعطى الجدول (4 ـ 1) عناصر هذه المصفوفة.

وإذا رمز لهذه المصفوفة بالرمز [ف]، فإن معكوس هذه المصفوفة $[ف]^{-1}$ يمكن تحديده بأي طريقة من الطرق المعروفة:

$$[ف]^{-1} = \begin{bmatrix} 40.5328 & 24.2000 \\ 24.2000 & 15.4000 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[ف]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.39932 & 0.62751- \\ 0.62751- & 1.05102 \end{bmatrix} \ldots\ldots [4-2]$$

بتطبيق المعادلات المصفوفية (4 ـ 1) و(4 ـ 2) فى الاختلافات الأربعة ($خ_1$، $خ_2$، $خ_3$، $خ_4$) نتوصل إلى العلاقة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} أ_1 & أ_2 & أ_3 & أ_4 \\ ب_1 & ب_2 & ب_3 & ب_4 \end{bmatrix} =$$

$$[ف]^{-1} \begin{bmatrix} ج م^2 خ_1 & ج م^2 خ_2 & ج م^2 خ_3 & ج م^2 خ_4 \\ ج م خ_1 & ج م خ_2 & ج م خ_3 & ج م خ_4 \end{bmatrix}$$

أو $[ث] = [ف]^{-1} [خ]$ ..... (4 ـ 3)

يبين الجدول (4 ـ 2) عناصر المصفوفة [خ] فى المعادلة المصفوفية (4 ـ 3)، وبالقيام بعمليات الضرب يتم التوصل إلى الدوال التقريبية التالية للاختلافات:

$$\begin{cases} خ_1 \cong -0.029م^2 + 0.143م \\ خ_2 \cong -0.017م^2 + 0.096م \\ خ_3 \cong -0.012م^2 + 0.064م \\ خ_4 \cong -0.009م^2 + 0.045م \end{cases} \quad \ldots\ldots (4-4)$$

بناء على ما تقدم يكون العمق التقريبى البديل للقطاع فى كل حالة كما يلى:

$$\begin{cases} (س/ل)_1 = 2/1 - خ_1 \\ \cong 2/1 - 0.143م + 0.029م^2 \\ (س/ل)_2 = 3/2 - خ_2 \\ \cong 3/2 - 0.096م + 0.017م^2 \\ (س/ل)_3 = 4/3 - خ_3 \\ \cong 4/3 - 0.064م + 0.012م^2 \\ (س/ل)_4 = 5/4 - خ_4 \\ \cong 5/4 - 0.045م + 0.009م^2 \end{cases} \quad \ldots (4-5)$$

بدراسة العلاقات (4 ـ 5) توصل الكاتب إلى وضع المعادلة العامة التالية لتحديد العمق التقريبى البديل للذراعيات متغيرة القصور الذاتى بقطاع مستطيل:

$$(س/ل)_{ت+1} \cong (1+ت)/(2+ت) - م/\left[7+ت(2+ت)\right] + م^2/(35+24ت). \quad \ldots\ldots (4-6)$$

حيث ت = 0، 1، 2، ...

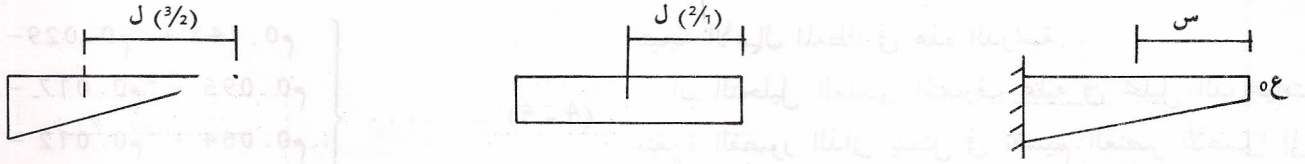
يبين الجدول (4 ـ 3) نسبة الخطأ فى ما بين العلاقة التقريبية المستخدمة للقيم (س/ل) من المعادلة (4 ـ 6) لأربع قيم من المتغير (ت) وقيم (س/ل) الفعلية المعطاة فى الجداول (3ـ1، 3ـ2، 3ـ3). كما يبين الجدول (4ـ4) نسبة الخطأ فى القيم القصوى لتشكيلات الطرف الحر للذراعيات باستعمال العلاقة التقريبية (4 ـ 6) أيضاً والقيم الفعلية المعطاة فى نفس الجداول المشار إليها.

5 ـ الخلاصة:

تم فى هذه الورقة استنتاج علاقة تقريبية لتمثيل الذراعيات متغيرة القصور الذاتى وبعمق متغير خطى بذراعيات بديلة ثابتة القصور الذاتى. إن النتائج المتحصل عليها هنا تشير إلى فعالية هذه العلاقة من حساب التشكلات القصوى لذراعيات نتيجة الأعمال المعطاة فى هذه الدراسة.

ان التحليل العددى المتعارف عليه فى تحليل الذراعيات متغيرة القصور الذاتى يتمثل فى تقسيم العنصر الأصلى إلى عناصر صغيرة ويعتبر القصور الذاتى لهذه العناصر ثابتاً ومساوياً لذلك عند منتصفها أو عند أحد أطرافها. وتزداد الدقة كلما ازداد عدد هذه العناصر. أما هنا فعنصر بديل واحد يمكن التحصل على نتائج جيدة وبأخطاء صغيرة مقبولة هندسياً، وذلك يوفر كثيراً فى زمن التحليل وتكاليفه سواء العادى منه أو باستعمال طرق الحسب الآلى المختلفة.

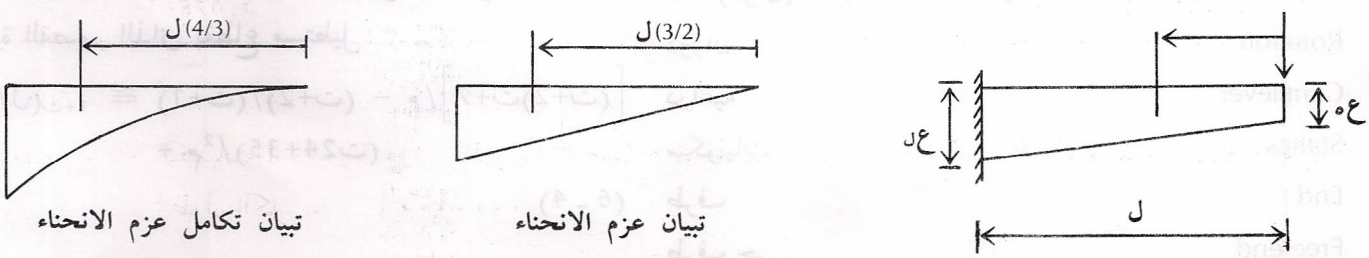
إزاحة	Displacement
تبيان	Diagram
تحليل عددى	Numerical Analysis
تشكل	Deformation
تقوس	Curvature
خطى	Linear
دالة (دوال)	function(s)
دوران	Rotation
ذراعية	Cantilever
سكونيات	Statics
طرف	End
طرف حر	Free end
طرف مثبت	Fixed end
عارضة (عوارض)	Beam(s)
عزم انحناء	Bending Moment
عنصر	Element
غير محدد سكونيا	Statically Indeterminate
قصور ذاتى	Inertia
قوة	Force
محور	Axis
مربعات أقل	Least squares
مركز هندسى	Centroid
مرونة	Elasticity
مصفوفة	Matrix
معطيات حدودية	Bandary conditions
معكوس	Inverse



م*	(ى ر٥ / نـ ل)ن١	(س/ل)٢	خ١ = 1/2 - (س/ل)١	(ى ر٥ / نـ ل)٢ح١	(س/ل)٢	خ٢ = 2/3 - (س/ل)٢
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,2	0,7639	0,470	0,030	0,6944	0,646	0,020
0,4	0,6122	0,444	0,056	0,5102	0,629	0,038
0,6	0,5078	0,422	0,078	0,3906	0,613	0,053
0,8	0,4321	0,403	0,097	0,3086	0,600	0,067
1,0	0,3750	0,387	0,113	0,2500	0,587	0,079
1,2	0,3306	0,372	0,128	0,2066	0,576	0,090
1,4	0,2951	0,359	0,141	0,1736	0,566	0,101
1,6	0,2663	0,346	0,154	0,1479	0,557	0,110
1,8	0,2423	0,336	0,164	0,1276	0,548	0,119
2,0	0,2222	0,326	0,174	0,1111	0,540	0,127

م = عـ ل / عـ ٥ - 1

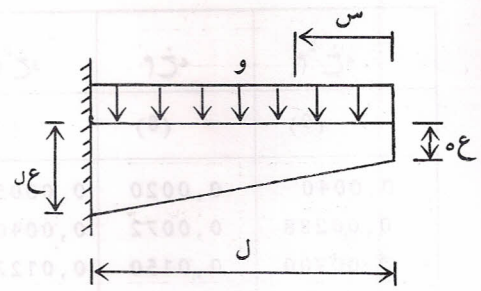
الجدول (3 ـ 1) الكميات الفعلية للدوران والازاحة الرأسية عند الطرف الحر للذراعية تحت تأثير عزم مركز عند الطرف الحر.



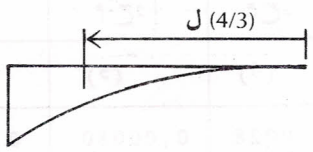
م*	(2ى ر٥/ق ل٢)ن٢	(س/ل)٢	خ٢ = 2/3 - (س/ل)٢	(3ى ر٥/ق ل٣)ح٢	(س/ل)٣	خ٣ = 3/4 - (س/ل)٣
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,2	0,6944	0,646	0,020	0,6623	0,736	0,014
0,4	0,5102	0,629	0,038	0,4660	0,725	0,025
0,6	0,3906	0,613	0,053	0,3429	0,715	0,035
0,8	0,3086	0,600	0,067	0,2612	0,705	0,045
1,0	0,2500	0,587	0,079	0,2044	0,698	0,052
1,2	0,2066	0,576	0,090	0,1636	0,690	0,060
1,4	0,1736	0,566	0,101	0,1334	0,684	0,066
1,6	0,1479	0,557	0,110	0,1104	0,678	0,072
1,8	0,1276	0,548	0,119	0,09266	0,672	0,078
2,0	0,1111	0,540	0,127	0,07865	0,667	0,083

م = عـ ل / عـ ٥ - 1

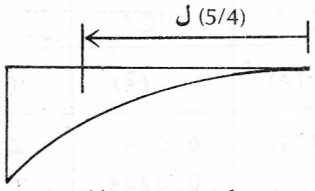
الجدول (3 ـ 2) الكميات الفعلية للدوران والازاحة الرأسية عند الطرف الحر للذراعية تحت تأثير قوة رأسية مركزة عند الطرف الحر.



تبيان عزم الانحناء



تبيان تكامل عزم الانحناء



م*	(6ى ر٥/ول^3)ن$_3$	(س/ل)$_3$	خ$_3$= (س/ل)$_3$-4/3	(8ى ر٥/ول^4)ح$_3$	(س/ل)$_4$	خ$_4$= (س/ل)$_4$-5/4
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,2	0,6623	0,736	0,014	0,6438	0,790	0,010
0,4	0,4660	0,725	0,025	0,4419	0,782	0,018
0,6	0,3429	0,715	0,035	0,3179	0,775	0,025
0,8	0,2612	0,705	0,045	0,2373	0,769	0,031
1,0	0,2044	0,698	0,052	0,1822	0,764	0,036
1,2	0,1636	0,690	0,060	0,1434	0,759	0,041
1,4	0,1334	0,684	0,066	0,1150	0,755	0,045
1,6	0,1104	0,678	0,072	0,09376	0,751	0,049
1,8	0,09266	0,672	0,078	0,07754	0,747	0,053
2,0	0,07865	0,667	0,083	0,06493	0,744	0,056

م = عل / ع٥ - 1

الجدول (3 ـ 3) الكميات الفعلية للدوران والازاحة الرأسية عند الطرف الحر للذراعية تحت تأثير قوة موزعة بانتظام على الطول الكلى لها.

م	م^2	م^3	م^4
0,2	0,04	0,008	0,0016
0,4	0,16	0,064	0,0256
0,6	0,36	0,216	0,1296
0,8	0,64	0,512	0,4096
1,0	1,00	1,000	1,0000
1,2	1,44	1,728	2,0736
1,4	1,96	2,744	3,8416
1,6	2,56	4,096	6,5536
1,8	3,24	5,832	10,4976
2,0	4,00	8,000	16,0000
ج	15,40	24,200	40,5328

الجدول (4 ـ 1) عناصر المصفوفة المربعة فى المعادلة (4 ـ 1)

م	م خ^{1}	م^{2} خ^{1}	م خ^{2}	م^{2} خ^{2}	م خ^{3}	م^{2} خ^{3}	م خ^{4}	م^{2} خ^{4}
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0,2	0,0060	0,00120	0,0040	0,00080	0,0028	0,00056	0,0020	0,0040
0,4	0,0224	0,00896	0,0152	0,00608	0,0100	0,00400	0,0072	0,00288
0,6	0,0468	0,02808	0,0318	0,01908	0,0213	0,01278	0,0150	0,00900
0,8	0,0776	0,06208	0,0536	0,04288	0,0356	0,02848	0,0248	0,1984
1,0	0,1130	0,11300	0,0790	0,07900	0,0520	0,05200	0,0360	0,03600
1,2	0,1536	0,18432	0,1080	0,12960	0,0720	0,08640	0,0492	0,05904
1,4	0,1974	0,27636	0,1414	0,19796	0,0924	0,12936	0,0630	0,08820
1,6	0,2464	0,39424	0,1760	0,28160	0,1152	0,18432	0,0784	0,12544
1,8	0,2952	0,53136	0,2142	0,38556	0,1404	0,25272	0,0954	0,17172
2,0	0,3480	0,69600	0,2540	0,50800	0,1660	0,33200	0,1120	0,22400
ج	1,5064	2,29560	1,0772	1,65056	0,7077	1,08262	0,4830	0,73652

الجدول (4 ـ 2) عناصر المصفوفة [خ] فى المعادلة (4 ـ 3)

ت	0		1		2		3	
م	القيمة التقريبية	نسبة الخطأ %	القيمة التقريبية	نسبة الخطأ %	القيمة التقريبية	نسبة الخطأ %	القيمة التقريبية	نسبة الخطأ %
0,2	0,473	0,64	0,647	0,15	0,737	0,14	0,791	0,13
0,4	0,447	0,68	0,629	–	0,725	–	0,783	0,13
0,6	0,425	0,71	0,613	–	0,714	0,07–	0,776	0,13
0,8	0,404	0,25	0,598	0,33–	0,704	0,21–	0,770	0,13
1,0	0,386	0,26–	0,584	0,51–	0,695	0,43–	0,764	–
1,2	0,370	0,54–	0,571	0,87–	0,687	0,43–	0,754	–
1,4	0,356	0,84–	0,560	1,06–	0,680	0,58–	0,755	–
1,6	0,345	0,29–	0,550	1,26–	0,674	0,59–	0,751	–
1,8	0,335	0,30–	0,542	1,09–	0,669	0,45–	0,748	0,13
2,0	0,329	0,92	0,534	1,11–	0,665	0,30–	0,746	0,27

الجدول (4 ـ 3) نسبة الأخطاء فى قيم (س/ل) التقريبية (المعادلة 4 ـ 6).

م	(ى ره / ز ل) ن1		(2 ى ره /ز ل^2) ح1 (2 ى ره ق ل^2) ن1		(3 ى ره / ق ل^3) ح2 (6 ى ره / و ل^3) ن3		(8 ى ره / و ل^4) ح3	
	القيمة التقريبية	الخطأ %	القيمة التقريبية	الخطأ %	القيمة التقريبية	الخطأ %	القيمة التقريبية	الخطأ %
0,2	0,7625	0,18-	0,6942	0,03-	0,6620	0,05-	0,6436	0,03-
0,4	0,6105	0,28-	0,5100	0,04-	0,4658	0,04-	0,4416	0,07-
0,6	0,5059	0,37-	0,3908	0,05	0,3431	0,06	0,3177	0,06-
0,8	0,4316	0,12-	0,3095	0,29	0,2618	0,23	0,2370	0,13-
1,0	0,3756	0,16	0,2516	0,64	0,2053	0,44	0,1822	--
1,2	0,3321	0,45	0,2090	1,16	0,1647	0,67	0,1433	0,07-
1,4	0,2972	0,71	0,1761	1,44	0,1344	0,75	0,1149	0,09-
1,6	0,2675	0,45	0,1505	1,76	0,1114	0,91	0,0937	0,11-
1,8	0,2428	0,21	0,1297	1,65	0,0934	0,76	0,0774	0,13-
2,0	0,2194	1,26-	0,1131	1,80	0,0791	0,51	0,0646	0,46-

الجدول (4 ـ 4) نسبة الأخطاء فى قيم التشكلات القصوى التقريبية للطرف الحر فى الـذراعيات (انـظر الجداول 3 ـ 1، 3 ـ 2، 3 ـ 3).